

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Беспалов Владимир Александрович Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Должность: Ректор МИЭТ Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Дата подписания: 12.10.2023 16:02:05

«Национальный исследовательский университет

Уникальный программный ключ:

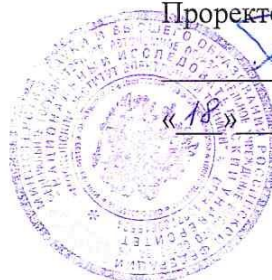
«Московский институт электронной техники»

ef5a4fe6ed0ffdf3f1a49d6ad1b49464dc1bf7354f736d76c8f8bea882b8d602

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

А.Г. Балашов



«18» 05 2023 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

### «Функциональный анализ»

Направление подготовки - 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Направленность (профиль) - «Компьютерная математика и математическое моделирование»

## 1. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательных программ:

Компетенции, формируемые в дисциплине	Подкомпетенции, формируемые в дисциплине	Индикаторы достижения компетенций
<b>ОПК-1.</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	<b>ОПК-1 ФункАн.</b> Способен использовать понятия и положения функционального анализа при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	<i>Знает</i> основные понятия функционального анализа: функциональные пространства, функционал, мера и интеграл Лебега. <i>Умеет</i> находить меры различных множеств, использовать понятия функциональных пространств для решения дифференциальных и интегральных уравнений. <i>Имеет опыт</i> использования понятий меры, банахова и гильбертова пространств, операторов различных типов в смежных математических дисциплинах

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина входит в обязательную часть Блока 1 «Дисциплины (модули)» образовательной программы.

Входные требования к дисциплине: для изучения дисциплины необходимо владение базовыми знаниями и умениями в области математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений.

## 3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Курс	Семестр	Общая трудоёмкость (ЗЕ)	Общая трудоёмкость (часы)	Контактная работа			Самостоятельная работа (часы)	Промежуточная аттестация
				Лекции (часы)	Лабораторные работы (часы)	Практические занятия (часы)		
2	1	5	180	32	-	32	80	Экз (36)

#### 4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

№ и наименование модуля	Контактная работа			Самостоятельная работа	Формы текущего контроля
	Лекции (часы)	Лабораторные работы (часы)	Практические занятия (часы)		
1. Полнота и интеграл Лебега	8	-	10	20	Контроль выполнения текущих домашних заданий Контроль выполнения большого домашнего задания 1 (БДЗ 1) Контрольная работа № 1
2. Линейные и гильбертовы пространства	8	-	10	30	Контроль выполнения текущих домашних заданий Контроль выполнения большого домашнего задания 2 (БДЗ 2) Контрольная работа № 2 Коллоквиум
3. Линейные операторы	16	-	12	30	Контроль выполнения текущих домашних заданий Контроль выполнения большого домашнего задания 3 (БДЗ 3) Контроль выполнения большого домашнего задания 4 (БДЗ 4) Контрольная работа № 3

##### 4.1. Лекционные занятия

№ модуля дисциплины	№ лекции	Объем занятий (часы)	Краткое содержание
1	1	2	<b>Метрические пространства.</b> Основные метрические пространства, сходимость в метрических пространствах. Сжимающие операторы. Метод последовательных приближений
	2	2	<b>Полные метрические пространства.</b> Фундаментальная последовательность. Конечномерные и бесконечномерные пространства. Пополнение. Лемма Гейне-Бореля о покрытиях.
	3	2	<b>Мера Лебега.</b> Верхняя мера Лебега, измеримость множеств. Измеримые

			функции, измеримость непрерывных функций.
	4	2	<b>Интеграл Лебега.</b> Интегральные суммы Римана и Лебега. Простые функции, определение интеграла Лебега. Сходимость в среднем и сходимость почти всюду. Теорема Лебега. Счетная аддитивность интеграла.
2	5	2	<b>Линейные нормированные пространства.</b> Понятия линейного пространства и линейного подпространства. Линейно независимые системы. Размерность линейного пространства. Нормированные пространства. Понятия нормы, полунормы и банахова пространства. Основные банаховы пространства.
	6	2	<b>Пространства со скалярным произведением.</b> Понятия скалярного произведения и гильбертова пространства. Основные гильбертовы пространства. Весовые пространства Лебега. Ортогональные системы.
	7	2	<b>Полные системы.</b> Понятия полной системы и ортогонального базиса. Полные системы и ортогональные базисы в пространствах Лебега.
	8	2	<b>Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и задача аппроксимации.</b> Разложение вектора по ортонормированной системе в конечномерном пространстве. Разложение вектора по ортонормированной системе в бесконечномерном пространстве. Сходимость ряда Фурье. Приложение рядов Фурье к решению задач аппроксимации. Замечания о сходимости рядов Фурье
3	9	2	<b>Понятие линейного оператора.</b> Линейные интегральные операторы Фредгольма и Вольтерры. Линейные дифференциальные операторы, операторы Штурма-Лиувилля.
	10	2	<b>Обратный оператор.</b> Понятие обратимости. Критерий для линейных операторов. Обратимость линейных дифференциальных операторов второго порядка с начальными и граничными условиями.
	11	2	<b>Собственные числа и собственные векторы линейных операторов.</b> Понятие собственного числа и собственного вектора. Собственные векторы симметричных операторов. Системы собственных функций для симметричных интегральных и дифференциальных операторов. Задача Штурма-Лиувилля. Применение собственных векторов для решения линейных уравнений
	12	2	<b>Непрерывность операторов.</b> Понятие непрерывности. Критерий для линейного оператора. Непрерывность интегральных операторов Фредгольма. Условия непрерывности для линейных дифференциальных операторов.
	13	2	<b>Непрерывность обратного оператора.</b> Понятие непрерывной обратимости. Критерий для линейных операторов. Понятие устойчивости для решения операторного уравнения. Условия для положительной определенности операторов Штурма-Лиувилля. Условия для непрерывной обратимости интегральных операторов Фредгольма
	14	2	<b>Теория Фредгольма.</b> Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром. Иллюстрация теорем Фредгольма на

			примерах уравнений с выраженным ядром.
	15	2	<b>Оптимизация функционалов в гильбертовом пространстве.</b> Теорема Рисса для линейных непрерывных функционалов. Дифференцирование и оптимизация функционалов. Метод Ритца для приближенной оптимизации функционалов
	16	2	<b>Вариационный и проекционный подходы к приближенному решению линейных операторных уравнений.</b> Вариационные методы. Функционал наименьших квадратов. Функционал энергии. Проекционные методы. Сходимость метода наименьших квадратов и метода Галеркина

#### 4.2. Практические занятия

№ модуля дисциплины	№ практического занятия	Объем занятий (часы)	Краткое содержание
1	1	2	<b>Метрические пространства. Принцип сжимающих отображений.</b> Примеры пространств непрерывных функций с двумя различными метриками: максимального отклонения и среднего отклонения. Принцип сжимающих отображений для алгебраических уравнений и задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
	2	2	<b>Пополнение.</b> Примеры пополнений: пространство рациональных чисел, действительные числа с нестандартными метриками, пространство многочленов с метрикой максимального отклонения. Лемма Гейне-Бореля о покрытиях.
	3	2	<b>Верхняя мера Лебега, измеримость множеств.</b> Сравнение верхней меры Лебега и Жордана. Вычисление этих величин для множества рациональных чисел отрезка $[0,1]$ . Измеримость Канторова множества и его мера. Борелевские множества, примеры. Вычисление интеграла Лебега
	4	2	<b>Пространство Лебега как пополнение пространства непрерывных функций по метрике среднего отклонения.</b> Плотность множества многочленов и ступенчатых функций в пространстве Лебега.
	5	2	<b>Контрольная работа №1</b>
2	6	2	<b>Линейные пространства.</b> Норма, полунорма, скалярное произведение
	7	2	<b>Гильбертовы пространства.</b> Ортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации. Построение ортогональных многочленов Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита

	8	2	<b>Ряды Фурье.</b> Ортогональное дополнение, его замкнутость. Двойное ортогональное дополнение. Ортогонализация. Полиномы Эрмита.
	9	2	<b>Ряды Фурье и задача аппроксимации.</b> Качество сходимости ряда Фурье. Сравнение тригонометрической и полиномиальной аппроксимации. Сравнение ряда Фурье и ряда Тейлора
	10	2	<b>Контрольная работа №2</b>
3	11	2	<b>Линейные операторы.</b> Проверка линейности. Построение обратных операторов
	12	2	<b>Собственные числа и собственные функции линейных операторов.</b> Системы собственных функций для симметричных интегральных и дифференциальных операторов. Задача Штурма-Лиувилля. Применение собственных векторов для решения линейных уравнений
	13	2	<b>Непрерывный и непрерывно обратимый линейный оператор.</b> Операторы Штурма-Лиувилля. Интегральные операторы Фредгольма
	14	2	<b>Оптимизация функционала.</b> Дифференцирование и оптимизация функционалов. Метод Ритца для приближенной оптимизации функционалов
	15	2	<b>Метод Галёркина и метод наименьших квадратов.</b> Обоснование единственности решения и возможности применения методов, нахождения приближённых решений задачи Дирихле для дифференциальных уравнений, задачи Штурма-Лиувилля, интегрального уравнения Фредгольма.
	16	2	<b>Контрольная работа №3.</b>

#### 4.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

#### 4.4. Самостоятельная работа студентов

№ модуля дисциплины	Объем занятий (часы)	Вид СРС
1	6	Выполнение текущих заданий по темам лекций 1-4 и практических занятий 1-4
	8	Выполнение индивидуальных заданий БДЗ 1
	6	Подготовка к контрольной работе №1
2	6	Выполнение текущих заданий по темам лекций 5-8 и практических занятий 6-9
	8	Выполнение индивидуальных заданий БДЗ 2
	6	Подготовка к контрольной работе №2
	10	Подготовка к коллоквиуму
3	8	Выполнение текущих заданий по темам лекций 9-16 и практических

	занятий 11-15
8	Выполнение индивидуальных заданий БДЗ 3
8	Выполнение индивидуальных заданий БДЗ 4
6	Подготовка к контрольной работе №3

#### 4.5. Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Не предусмотрены

### 5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы студентов в составе УМК дисциплины (ОРИОКС// URL: , <http://orioks.miet.ru/>):

#### Общее

- ✓ Методические указания студентам по изучению дисциплины

#### Модуль 1 «Полнота и интеграл Лебега»

- ✓ Материалы для самостоятельного изучения теории в рамках выполнения большого домашнего задания 1.
- ✓ Материалы для самостоятельной работы на практических занятиях (включают подробные планы работы на практических занятиях)

#### Модуль 2 «Линейные и гильбертовы пространства»

- ✓ Материалы для самостоятельного изучения теории в рамках выполнения больших домашних заданий.
- ✓ Материалы для самостоятельной работы на практических занятиях (включают подробные планы работы на практических занятиях)

#### Модуль 3 «Линейные операторы»

- ✓ Материалы для самостоятельного изучения теории в рамках выполнения больших домашних заданий.
- ✓ Материалы для самостоятельной работы на практических занятиях (включают подробные планы работы на практических занятиях)

## 6. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### Литература

1	Треногин В.А. Функциональный анализ : Учебник / В.А. Треногин. - 3-е изд., испр. - М. : Физматлит, 2002. - 448 с.
2	Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу: учебное пособие / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2012. - 192 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/3175">https://e.lanbook.com/book/3175</a> (дата обращения: 06.04.2023).
3	Миротин А.Р. Функциональный анализ: Мера и интеграл: Учеб. пособие / А.Р. Миротин. - 2-е изд. - М. : URSS. ЛИБРОКОМ, 2013.
4	Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. - 4-е, изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 488 с. — ISBN 978-5-9221-0804-1. - Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/59471">https://e.lanbook.com/book/59471</a> (дата обращения: 06.04.2023)
5	Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 176 с. — ISBN 978-5-8114-1821-3. - Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/212048">https://e.lanbook.com/book/212048</a> (дата обращения: 06.04.2023).
6	Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-1822-0. - Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/212057">https://e.lanbook.com/book/212057</a> (дата обращения: 06.04.2023).

### Периодические издания

1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ / Российская академия наук, ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. - М. : ФГБУН МИ им. В.А. Стеклова РАН, 1967 -. - <http://www.mathnet.ru/faa> (дата обращения: 06.04.2023). - Режим доступа: свободный. - ISSN 0374-1990 (print), 2305-2899 (online). - Текст : электронный

## 7. ПЕРЕЧЕНЬ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ БАЗ ДАННЫХ, ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ

1. Лань : Электронно-библиотечная система Издательства Лань. - СПб., 2011-. - URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 06.04.2023). - Режим доступа: для авторизованных пользователей МИЭТ
2. eLIBRARY.RU : Научная электронная библиотека: сайт. - Москва, 2000 -. - URL: <https://www.elibrary.ru/defaultx.asp> (дата обращения: 06.04.2023). - Режим доступа: для зарегистрированных пользователей
3. Math-Net.Ru: общероссийский математический портал: сайт. – Москва, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2020. – URL: <http://www.mathnet.ru/> (дата обращения: 06.04.2023). – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей.



## 8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Используется традиционная технология обучения.

Лекции и практические занятия проводятся в аудиториях института по расписанию.

Практические занятия проходят в форме совместного решения задач.

В процессе обучения при проведении занятий и для самостоятельной работы используются внутренние электронные ресурсы (<http://orioks.miet.ru>).

В частности, для взаимодействия преподавателя со студентом с целью оперативного консультирования по вопросам текущих домашних заданий и теоретического материала в случае необходимости используется раздел «Домашние задания» среды ОРИОКС. Через ОРИОКС студенты имеют доступ к теоретическим сведениям по темам курса и к разработкам по практическим занятиям, содержащим необходимый теоретический материал и разбор решений задач.

Для взаимодействия студентов с преподавателем также используются электронная почта.

## 9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

<b>Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы</b>	<b>Оснащенность учебных аудиторий и помещений для самостоятельной работы</b>	<b>Перечень программного обеспечения</b>
Учебная аудитория	Учебная доска Мультимедийное оборудование (компьютер с ПО и возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронно-образовательную среду МИЭТ; телевизоры; акустическое оборудование (микрофон, звуковые колонки))	Операционная система Microsoft Windows от 7 версии и выше, Microsoft Office Professional Plus или Open Office, браузер (Firefox, Google Chrome); Acrobat reader DC
Учебная аудитория	Учебная доска	ПО не требуется
Помещение для самостоятельной работы обучающихся	Компьютерная техника с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду МИЭТ	Операционная система Microsoft Windows от 7 версии и выше, Microsoft Office Professional Plus или Open Office, браузер (Firefox, Google Chrome); Acrobat reader DC

## **10. ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ/ПОДКОМПЕТЕНЦИЙ**

ФОС по подкомпетенции ОПК-1 ФункАн. Способен использовать понятия и положения функционального анализа при решении задач в области естественных наук и инженерной практике.

Фонд оценочных средств представлен отдельным документом и размещен в составе УМК дисциплины электронной информационной образовательной среды ОРИОКС// URL: <http://orioks.miet.ru/>.

## **11. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **11.1. Особенности организации процесса обучения**

Работа по изучению дисциплины состоит из контактной и самостоятельной работы. Основной формой контактной работы являются лекции и семинары (практические занятия). Посещение лекций и семинаров обязательно. Выполнение текущих домашних заданий, состоящих из задач, аналогичных разобранным на семинаре, является обязательным. Дополнительной формой аудиторной работы являются консультации. Консультации проводятся лектором еженедельно, их посещение для студентов необязательно. На консультациях обсуждаются решения задач, теоретический материал по теме, переписываются контрольные работы и в некоторых случаях защищаются БДЗ.

При подготовке к семинарским занятиям, выполнении БДЗ, подготовке к контрольным работам, коллоквиуму и экзамену, рекомендуется изучить теоретический и практический материал, изложенный в методических материалах, представленных в ОРИОКС. БДЗ содержат практико-ориентированные задания на опыт деятельности.

Для оценки успеваемости студентов по дисциплине используется балльная накопительная система. При переписывании контрольной работы, сдаче БДЗ позже установленного срока, передаче коллоквиума возможно лишь выставление минимального балла.

### **11.2. Система контроля и оценивания**

Для оценки успеваемости студентов по дисциплине используется накопительная балльная система.

Баллами оцениваются: выполнение каждого контрольного мероприятия в семестре (в сумме до 57 баллов), активность в семестре (в сумме до 8 баллов) и сдача экзамена (до 35 баллов).

Текущий контроль успеваемости осуществляется с помощью самостоятельной и трех контрольных работ, индивидуальных больших домашних заданий, коллоквиума.

Промежуточный контроль успеваемости проводится в виде устного экзамена, включающего теоретические вопросы и практические задания.

За каждое задание контрольного мероприятия возможно начисление неполного балла за его выполнение. Контрольное мероприятие считается выполненным, если суммарно набрано не менее 40% от максимально возможного балла. В противном случае выставляется 0 баллов.

По сумме баллов выставляется итоговая оценка по предмету. Структура и график контрольных мероприятий доступен в ОРИОКС// URL: <http://orioks.miet.ru/>.

Мониторинг успеваемости студентов проводится в течение семестра трижды: по итогам 1-8, 9 – 12, 13 – 18 учебных недель.

**Дополнительные сведения о системе контроля.**

Если на момент начала экзаменационной сессии студент имеет неудовлетворительную оценку не менее, чем по двум мероприятиям из числа контрольных работ, БДЗ и коллоквиума, то его баллы за активность обнуляются.

**РАЗРАБОТЧИК:**

Доцент каф. ВМ-1, к.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_



/Т.В. Соколова/

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» по направлению подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», направленность (профиль) «Компьютерная математика и математическое моделирование», разработана на кафедре ВМ-1 и утверждена на заседании кафедры 25.04 2023 года, протокол № 11


Заведующий кафедрой ВМ-1  /А.А. Прокофьев/

### ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ

Рабочая программа согласована с Центром подготовки к аккредитации и независимой оценки качества

Начальник АНОК  / И.М. Никулина /

Рабочая программа согласована с библиотекой МИЭТ

/Директор библиотеки  / Т.П. Филиппова /